BAB 3
PENGAMIRAN

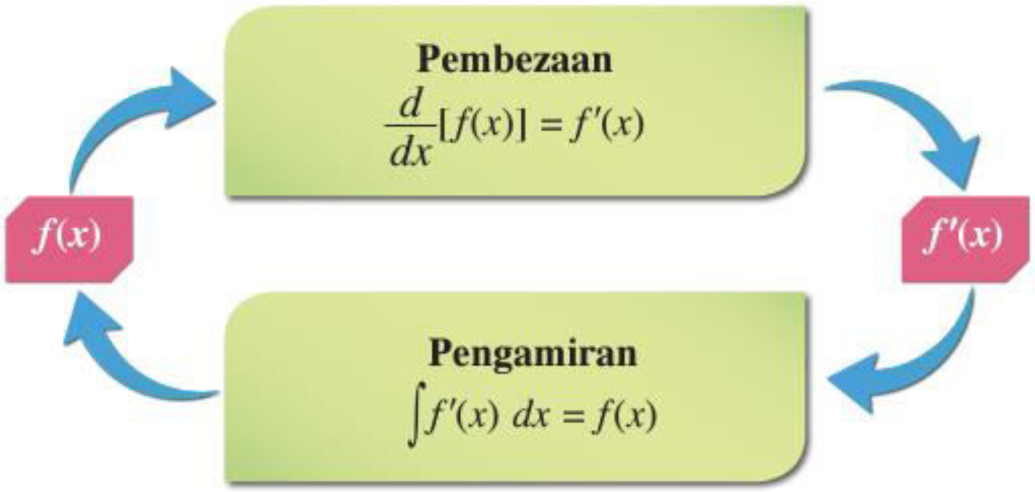
MATEMATIK TAMBAHAN TINGKATAN 5 KSSM
OLEH CIKGU NORAZILA KHALID
SMK ULU TIRAM, JOHOR

PENGAMIRAN SEBAGAI SONGSANGAN PEMBEZAAN

- Graf fungsi $g(x) = \int f'(x)\, dx$ adalah sama dengan graf fungsi $f(x)$.
- Graf fungsi $k(x) = \int h'(x)\, dx$ adalah sama dengan graf fungsi $h(x)$.
- Graf fungsi $n(x) = \int m'(x)\, dx$ adalah sama dengan graf fungsi $m(x)$.

PERKAITAN ANTARA PEMBEZAAN DENGAN PENGAMIRAN

PERKAITAN ANTARA PEMBEZAAN DENGAN PENGAMIRAN



Secara amnya,

Jika $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$, maka kamiran bagi $f'(x)$ terhadap x ialah $\int f'(x)\, dx = f(x)$.

Contoh 1

Diberi $\frac{d}{dx}(4x^2) = 8x$, cari $\int 8x\ dx$.

Penyelesaian

Pembezaan bagi $4x^2$ ialah $8x$.
Secara songsangan, pengamiran bagi $8x$ ialah $4x^2$.

Oleh itu, $\int 8x\ dx = 4x^2$.

Contoh 2

Penghasilan arang batu di sebuah kawasan perlombongan diberi oleh $K = 48\,000t - 100t^3$, dengan keadaan K ialah jisim arang batu yang dihasilkan, dalam tan, dan t ialah masa, dalam tahun.

(a) Cari kadar penghasilan arang batu, $\frac{dK}{dt}$, dalam sebutan t.

(b) Jika kadar penghasilan arang batu berubah kepada $\frac{dK}{dt} = 96\,000 - 600t^2$, hitung jisim arang batu yang dihasilkan, dalam tan, pada tahun ke-4.

Penyelesaian

(a) Diberi $K = 48\ 000t - 100t^3$.

Maka, $\dfrac{dK}{dt} = 48\ 000 - 300t^2$.

(b) Diberi $\dfrac{dK}{dt} = 96\ 000 - 600t^2$

$= 2(48\ 000 - 300t^2)$

Secara songsangan, pengamiran bagi $48\ 000 - 300t^2$ ialah $48\ 000t - 100t^3$.

Oleh itu, $\int 2(48\ 000 - 300t^2)\ dt = 2(48\ 000t - 100t^3)$

$= 96\ 000t - 200t^3$

Maka, jisim arang batu yang dihasilkan pada tahun ke-4 $= 96\ 000(4) - 200(4)^3$

$= 371\ 200$ tan

Latihan Kendiri 3.1

1. Diberi $\frac{d}{dx}(5x^3 + 4x) = 15x^2 + 4$, cari $\int (15x^2 + 4)\ dx$.
2. Diberi $\frac{d}{dx}(8x^3) = 24x^2$, cari $\int 24x^2\ dx$.
3. Penggunaan air di sebuah pusat beli-belah A boleh diwakili oleh fungsi $J = 100t^3 + 30t^2$, dengan keadaan J ialah isi padu air yang digunakan, dalam liter, dan t ialah masa, dalam hari.
   (a) Cari kadar penggunaan air bagi pusat beli-belah A, dalam sebutan t.
   (b) Jika kadar penggunaan air bagi pusat beli-belah A berubah kepada $\frac{dJ}{dt} = 1\ 500t^2 + 300t$, cari isi padu air, dalam liter, yang digunakan pada hari kedua.

Latihan Formatif 3.1

Kuiz bit.ly/2rGLiWM

1. Diberi $y = 3(2x + 2)^3$, cari $\frac{dy}{dx}$. Seterusnya, cari $\int [18(2x + 2)^2]\, dx$.
2. Diberi $f(x) = \frac{5x + 2}{2 - 3x}$, cari $f'(x)$ dan $\int f'(x)\, dx$.
3. Diberi $y = 5(x + 2)^3$ dan $\frac{dy}{dx} = h(x + 2)^k$, cari nilai $h + k$. Seterusnya, cari nilai bagi $\frac{1}{10}\int\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$ dengan keadaan $x = 2$.
4. Diberi $f(x) = 3x(2x + 1)^2$ dan $\int (12x^2 + 8x + 1)\, dx = af(x)$, cari nilai a.
5. Fungsi keuntungan harian daripada jualan tiket bas bagi sebuah syarikat K diberi oleh $A = 100t^2 + 50t^3$, dengan keadaan A ialah keuntungan yang diperoleh, dalam RM, dan t ialah masa, dalam hari.
   (a) Kira kadar keuntungan jualan tiket bas yang diperoleh syarikat itu selepas 5 hari.
   (b) Diberi kadar keuntungan jualan tiket bas bagi sebuah syarikat H ialah $\frac{dA}{dt} = 30t^2 + 40t$, syarikat manakah yang memperoleh keuntungan paling tinggi pada hari ke-10?

KAMIRAN TAK TENTU

- Bagi suatu pemalar a,

$$\int a\,dx = ax + c$$, dengan keadaan a dan c ialah pemalar.

- Bagi suatu fungsi ax^n,

$$\int ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$$, dengan keadaan a dan c ialah pemalar, n ialah integer dan $n \neq -1$.

KAMIRAN TAK TENTU

Kes 1

$y = 5x$, $\dfrac{dy}{dx} = 5$ dan

$\int 5 \, dx = 5x$

Kes 2

$y = 5x + 2$, $\dfrac{dy}{dx} = 5$ dan

$\int 5 \, dx = 5x + 2$

Kes 3

$y = 5x - 3$, $\dfrac{dy}{dx} = 5$ dan

$\int 5 \, dx = 5x - 3$

Contoh 3

Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) 12 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -0.5

Penyelesaian

(a) $\int 12\,dx = 12x + c$

(b) $\int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + c$

(c) $\int -0.5\,dx = -0.5x + c$

KAMIRAN TAK TENTU BAGI SUATU FUNGSI ALGEBRA

Contoh 4

Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int x^3 \, dx$

(b) $\int \frac{2}{x^2} \, dx$

Penyelesaian

(a) $\int x^3 \, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c$

$= \frac{x^4}{4} + c$

(b) $\int \frac{2}{x^2} \, dx = 2 \int x^{-2} \, dx$

$= 2\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + c$

$= -2x^{-1} + c$

$= -\frac{2}{x} + c$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

KAMIRAN TAK TENTU BAGI SUATU FUNGSI ALGEBRA

Contoh 5

Cari kamiran bagi setiap yang berikut.

(a) $\int (3x^2 + 2)\ dx$ (b) $\int (x - 2)(x + 6)\ dx$ (c) $\int x^2\left(3 + \frac{1}{x^5}\right) dx$

Penyelesaian

(a) $\int (3x^2 + 2)\ dx$

$= \int 3x^2\ dx + \int 2\ dx$

$= \frac{3x^3}{3} + 2x + c$

$= x^3 + 2x + c$

(b) $\int (x - 2)(x + 6)\ dx$

$= \int (x^2 + 4x - 12)\ dx$

$= \int x^2\ dx + \int 4x\ dx - \int 12\ dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 12x + c$

$= \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 12x + c$

(c) $\int x^2\left(3 + \frac{1}{x^5}\right) dx = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

$= \int \left(3x^2 + x^{-3}\right) dx$

$= \int 3x^2\ dx + \int x^{-3}\ dx$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^{-2}}{-2} + c$

$= x^3 - \frac{1}{2x^2} + c$

PERBINCANGAN

Kamiran bagi suatu fungsi yang melibatkan penambahan dan penolakan sebutan-sebutan algebra boleh diwakilkan dengan satu pemalar pengamiran sahaja. Jelaskan.

Latihan Kendiri 3.2

1. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int 2\ dx$ (b) $\int \frac{5}{6}\ dx$ (c) $\int -2\ dx$ (d) $\int \frac{\pi}{3}\ dx$

2. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $3x^2$ (b) $\frac{4}{3}x^3$ (c) $-x$ (d) $-\frac{2}{x^2}$

(e) $\frac{3}{x^3}$ (f) $3\sqrt{x}$ (g) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ (h) $\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^3$

3. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $2x + 3$ (b) $4x^2 + 5x$ (c) $\frac{1}{2}x^3 + 5x - 2$ (d) $\frac{3}{x^2} + 4x - 2$

4. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int (x + 2)(x - 4)\ dx$ (b) $\int x^2(3x^2 + 5x)\ dx$ (c) $\int (5x^2 - 3\sqrt{x})\ dx$

(d) $\int (5x - 3)^2\ dx$ (e) $\int \left(\frac{5x^2 - 3x}{x}\right) dx$ (f) $\int (x + \sqrt{x})^2\ dx$

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c, \text{ dengan keadaan}$$

a dan b ialah pemalar, n ialah integer dan $n \neq -1$.

KAMIRAN TAK TENTU BAGI FUNGSI BERBENTUK (AX + B)N, DENGAN KEADAAN A DAN B IALAH PEMALAR, N IALAH INTEGER DAN N ≠ −1

Contoh 6

Dengan menggunakan kaedah penggantian, cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int (3x + 5)^5 \, dx$

(b) $\int \sqrt{5x + 2} \, dx$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 3x + 5$

Jadi, $\frac{du}{dx} = 3$

$dx = \frac{du}{3}$

$$\int (3x + 5)^5 \, dx = \int \frac{u^5}{3} \, du$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^6}{6}\right) + c$$
$$= \frac{(3x + 5)^6}{18} + c$$

(b) Katakan $u = 5x + 2$

Jadi, $\frac{du}{dx} = 5$

$dx = \frac{du}{5}$

$$\int \sqrt{5x + 2} \, dx = \int \frac{\sqrt{u}}{5} \, du$$
$$= \int \frac{u^{\frac{1}{2}}}{5} \, du$$
$$= \frac{2}{15} u^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{15} (5x + 2)^{\frac{3}{2}} + c$$

Contoh 7

Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $(2 - 3x)^4$

(b) $\dfrac{3}{(5x - 3)^6}$

Penyelesaian

(a) $$\int (2 - 3x)^4 \, dx = \frac{(2 - 3x)^5}{-3(5)} + c$$
$$= -\frac{(2 - 3x)^5}{15} + c$$

(b) $$\int \frac{3}{(5x - 3)^6} \, dx = \int 3(5x - 3)^{-6} \, dx$$
$$= \frac{3(5x - 3)^{-5}}{5(-5)} + c$$
$$= -\frac{3}{25(5x - 3)^5} + c$$

Latihan Kendiri 3.3

1. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut dengan menggunakan kaedah penggantian.
   (a) $\int (x - 3)^2 \, dx$
   (b) $\int (3x - 5)^9 \, dx$
   (c) $\int 4(5x - 2)^5 \, dx$
   (d) $\int \frac{(7x - 3)^4}{3} \, dx$
   (e) $\int \frac{12}{(2x - 6)^3} \, dx$
   (f) $\int \frac{2}{3(3x - 2)^2} \, dx$

2. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.
   (a) $(4x + 5)^4$
   (b) $2(3x - 2)^3$
   (c) $(5x - 11)^4$
   (d) $\frac{(3x - 2)^5}{5}$
   (e) $\frac{5}{(6x - 3)^6}$
   (f) $\frac{12}{(3x - 5)^8}$

Diberi suatu fungsi kecerunan $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, maka persamaan lengkung bagi fungsi itu ialah $y = \int f'(x)\, dx$.

PERSAMAAN LENGKUNG DARIPADA FUNGSI KECERUNAN

Contoh 8

Tentukan nilai pemalar pengamiran, c bagi $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 3$ dengan $y = 25$ apabila $x = 2$.

Penyelesaian

Diberi $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 3$.

Jadi, $y = \int (4x^3 + 6x^2 - 3)\, dx$

$$y = \frac{4x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 3x + c$$

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x + c$$

Apabila $x = 2$ dan $y = 25$,

$$25 = 2^4 + 2(2)^3 - 3(2) + c$$

$$c = -1$$

Maka, nilai pemalar pengamiran, c bagi $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 3$ ialah -1.

Contoh 9

Kecerunan bagi suatu lengkung pada titik (x, y) ialah $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 4x - 3$.

(a) Jika lengkung itu melalui titik $(-1, 2)$, cari persamaan lengkung itu.

(b) Seterusnya, cari nilai y apabila $x = 1$.

Penyelesaian

(a) Diberi $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 4x - 3$.

Jadi, $y = \int (15x^2 + 4x - 3)\, dx$

$y = 5x^3 + 2x^2 - 3x + c$

Apabila $x = -1$ dan $y = 2$,

$2 = 5(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) + c$

$c = 2$

Maka, persamaan lengkung itu ialah

$y = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 2$.

(b) Apabila $x = 1$,

$y = 5(1)^3 + 2(1)^2 - 3(1) + 2$

$y = 6$

Maka, $y = 6$ apabila $x = 1$.

Latihan Kendiri 3.4

1. Cari nilai pemalar pengamiran, c bagi fungsi kecerunan yang berikut.
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 2$, $y = 7$ apabila $x = -1$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = -6x - \dfrac{6}{x^3}$, $y = 6$ apabila $x = -1$
2. Diberi $\dfrac{dy}{dx} = 20x^3 - 6x^2 - 6$ dan $y = 2$ apabila $x = 1$. Cari nilai y apabila $x = \dfrac{1}{2}$.
3. Cari persamaan lengkung bagi setiap fungsi kecerunan yang melalui titik berikut.
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 2$, titik $(1, 6)$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = 10x - 2$, titik $(2, 13)$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = 24x^2 - 5$, titik $(1, 1)$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = 18x^2 + 10x$, titik $(-2, -10)$

Latihan Formatif 3.2

Kuiz bit.ly/35pBrmA

1. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

   (a) $\int \frac{1}{2}\, dx$ (b) $\int \frac{5}{3x^3}\, dx$ (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (d) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right) dx$

2. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

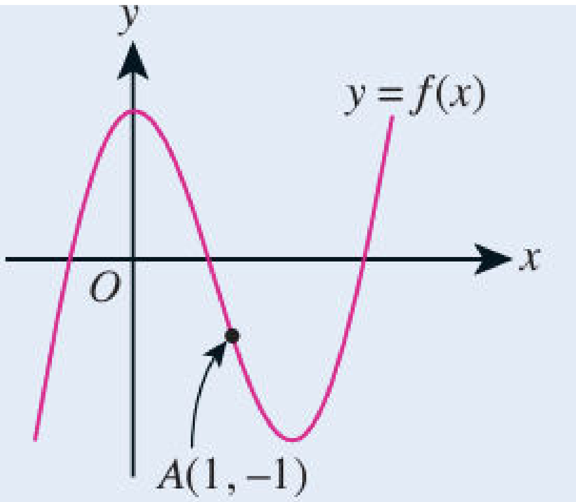
   (a) $\frac{5x^2 - 3x^3}{x}$ (b) $\frac{6x^3 + 2x^2}{2x^2}$ (c) $(5 - 6x)^3$ (d) $\frac{1}{\sqrt[4]{5 - 2x}}$

3. Diberi $\frac{dy}{dx} = 10x + \frac{p}{x^2}$, dengan keadaan p ialah pemalar. Jika $\frac{dy}{dx} = 20\frac{1}{2}$ dan $y = 19$ apabila $x = 2$, cari nilai p. Seterusnya, cari nilai y apabila $x = -2$.

4. (a) Diberi $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 15x^2 + 6$ dan $y = -20$ apabila $x = 3$, cari nilai y apabila $x = -2$.

   (b) Diberi $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$ dan $y = 2$ apabila $x = 2$. Cari nilai-nilai x apabila $y = -6$.

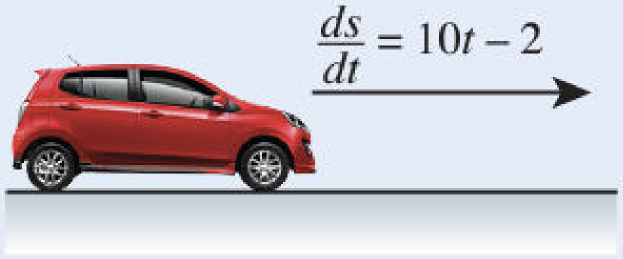
5. Rajah di sebelah menunjukkan suatu lengkung yang melalui titik $A(1, -1)$. Diberi fungsi kecerunan bagi lengkung tersebut ialah $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$, cari persamaan bagi lengkung itu.



6. Diberi kecerunan normal bagi suatu lengkung pada satu titik ialah $\frac{1}{6x - 2}$. Jika lengkung itu melalui titik (2, 2), cari persamaan bagi lengkung tersebut.

7. Diberi fungsi kecerunan bagi suatu lengkung ialah $ax + b$. Kecerunan lengkung pada titik (–2, 8) ialah –7 dan kecerunan lengkung pada titik (0, 6) ialah 5. Cari nilai a dan nilai b. Seterusnya, cari persamaan bagi lengkung tersebut.

8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kereta yang dipandu di sebuah jalan raya yang lurus. Diberi fungsi perubahan sesaran bagi kereta tersebut ialah $\frac{ds}{dt} = 10t - 2$ dan $s = 8$ m apabila $t = 1$ s. Cari sesaran, dalam m, apabila $t = 3$ s.



KAMIRAN TENTU

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[g(x) + c\right]_a^b$$
$$= [g(b) + c] - [g(a) + c]$$
$$= g(b) - g(a)$$

NILAI KAMIRAN TENTU BAGI SUATU FUNGSI ALGEBRA

Contoh 10

Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_{2}^{3} x^2\, dx$

(b) $\int_{-1}^{4} (3x^2 + 2x)\, dx$

Penyelesaian

(a) $\int_{2}^{3} x^2\, dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3$$

$$= \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

$$= \frac{19}{3}$$

(b) $\int_{-1}^{4} (3x^2 + 2x)\, dx$

$$= \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{4}$$

$$= \left[x^3 + x^2\right]_{-1}^{4}$$

$$= [4^3 + 4^2] - [(-1)^3 + (-1)^2]$$

$$= 80$$

Contoh 11

Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_1^2 \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2}\right) dx$

(b) $\int_2^4 (2x - 5)^4 \, dx$

Penyelesaian

(a) $\int_1^2 \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2}\right) dx$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^2 (x - 2) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} - 2(2)\right] - \left[\frac{1^2}{2} - 2(1)\right]$$

$$= -2 - \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

(b) $\int_2^4 (2x - 5)^4 \, dx$

$$= \left[\frac{(2x - 5)^5}{2(5)}\right]_2^4$$

$$= \left[\frac{(2(4) - 5)^5}{10}\right] - \left[\frac{(2(2) - 5)^5}{10}\right]$$

$$= \frac{243}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{122}{5}$$

Bagi suatu fungsi $f(x)$ dan $g(x)$,

(a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(c) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, dengan keadaan k ialah pemalar

(d) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$, dengan keadaan $a < b < c$

(e) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

SIFAT-SIFAT BAGI KAMIRAN TENTU

Contoh 12

Diberi $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$, $\int_3^5 f(x)\,dx = 3$ dan $\int_1^3 g(x)\,dx = 12$. Cari

(a) $\int_3^1 f(x)\,dx$ (b) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$ (c) $\int_1^5 f(x)\,dx$

Penyelesaian

(a) $\int_3^1 f(x)\,dx$

$= -\int_1^3 f(x)\,dx$

$= -4$

(b) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$

$= \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 g(x)\,dx$

$= 4 + 12$

$= 16$

(c) $\int_1^5 f(x)\,dx$

$= \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$

$= 4 + 3$

$= 7$

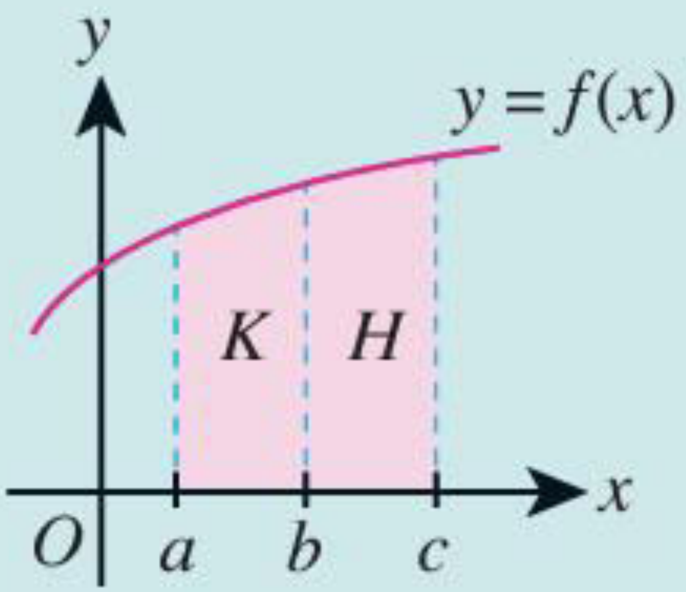
Contoh 13

Diberi $\int_2^5 f(x)\ dx = 12$, cari nilai h jika $\int_2^5 [hf(x) - 3]\ dx = 51$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\int_2^5 [hf(x) - 3]\ dx &= 51 \\
h\int_2^5 f(x)\ dx - \int_2^5 3\ dx &= 51 \\
12h - \Big[3x\Big]_2^5 &= 51 \\
12h - [3(5) - 3(2)] &= 51 \\
12h - 9 &= 51 \\
h &= 5
\end{aligned}$$

JUMLAH LUAS RANTAU



Jumlah luas rantau = Luas rantau K + Luas rantau H

$$\int_a^c f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Latihan Kendiri 3.5

1. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_2^4 x^3\, dx$ (b) $\int_1^4 \frac{2}{x^2}\, dx$ (c) $\int_1^5 (2x^2 + 3x)\, dx$

(d) $\int_2^6 \left(\frac{1}{x^3} - 2x\right) dx$ (e) $\int_1^3 \left(3x - \sqrt{x}\right) dx$ (f) $\int_3^5 \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

2. Cari nilai bagi setiap kamiran tentu yang berikut.

(a) $\int_2^4 \left(\frac{x^3 + x^2}{x}\right) dx$ (b) $\int_1^3 \left(\frac{5 + x^2}{x^2}\right) dx$ (c) $\int_1^5 \left(\frac{(2x + 3)(x - 2)}{x^4}\right) dx$

(d) $\int_3^4 (3x - 4)^2\, dx$ (e) $\int_{-3}^{-1} \frac{3}{(5 - 3x)^3}\, dx$ (f) $\int_{-2}^{0} \frac{2}{\sqrt{3 - 2x}}\, dx$

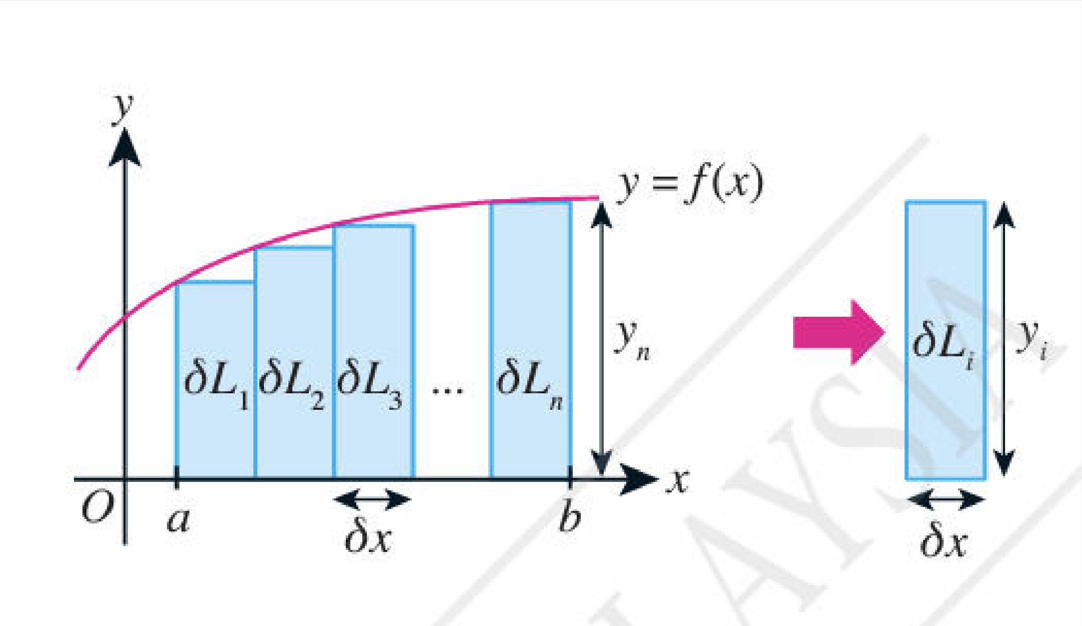
3. Diberi $\int_2^5 f(x)\, dx = 3$, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_5^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_2^5 \frac{1}{2} f(x)\, dx$ (c) $\int_2^5 [3f(x) - 2]\, dx$

4. Diberi $\int_3^7 f(x)\, dx = 5$ dan $\int_3^7 k(x)\, dx = 7$. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

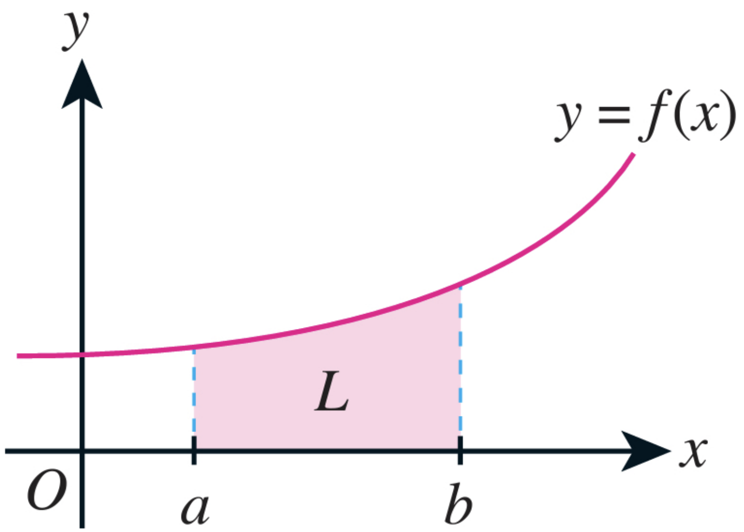
(a) $\int_3^7 [f(x) + k(x)]\, dx$ (b) $\int_3^5 f(x)\, dx - \int_7^5 f(x)\, dx$ (c) $\int_3^7 [f(x) + 2x]\, dx$

$$\text{Luas di bawah lengkung} = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \delta x = \int_a^b y \, dx$$



PERKAITAN ANTARA HAD BAGI HASIL TAMBAH LUAS SEGI EMPAT TEPAT DENGAN LUAS DI BAWAH SUATU LENGKUNG

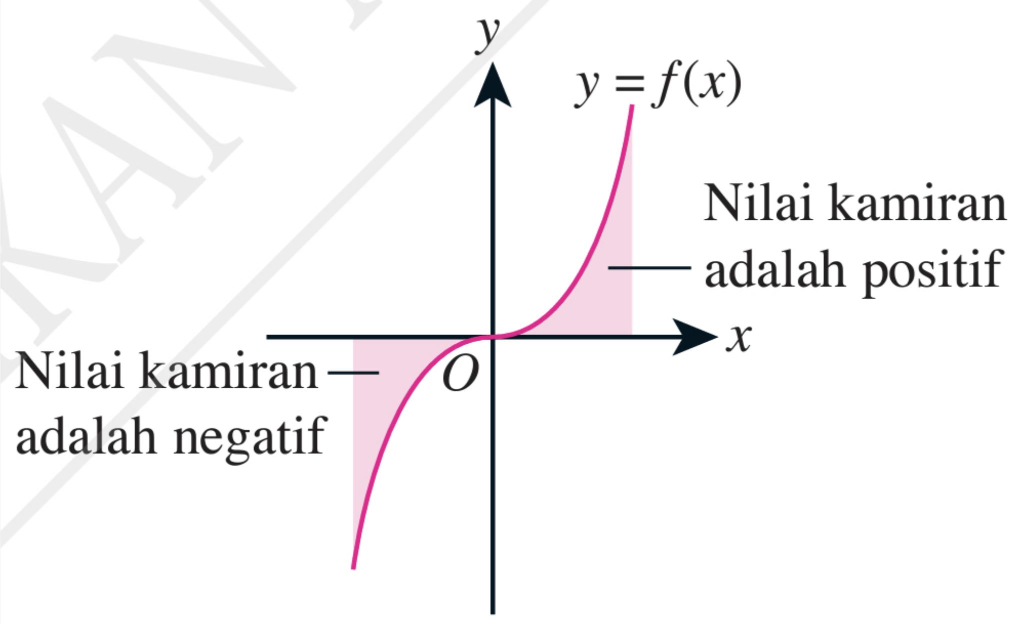
LUAS RANTAU ANTARA SUATU LENGKUNG DENGAN PAKSI-X



$$L = \int_a^b y \, dx$$

Bagi suatu rantau yang dibatasi oleh suatu lengkung dan paksi-x,

- Jika rantau itu berada di bawah paksi-x, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **negatif**.
- Jika rantau itu berada di atas paksi-x, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **positif**.
- Luas bagi kedua-dua rantau adalah positif.

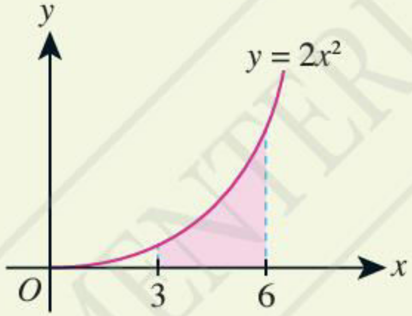


LUAS RANTAU ANTARA SUATU LENGKUNG DENGAN PAKSI-X

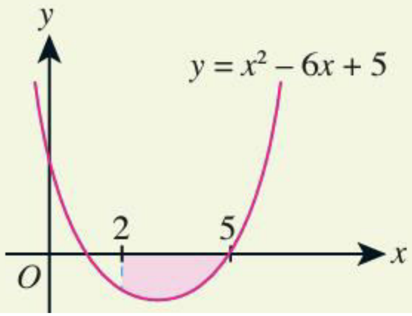
Contoh 14

Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

(a)



(b)



Penyelesaian

(a) Luas rantau $= \int_3^6 y\, dx$

$$= \int_3^6 2x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_3^6$$

$$= \frac{2(6)^3}{3} - \frac{2(3)^3}{3}$$

$$= 126$$

Maka, luas rantau berlorek ialah 126 unit^2.

(b) Luas rantau

$$= \int_2^5 y \, dx$$

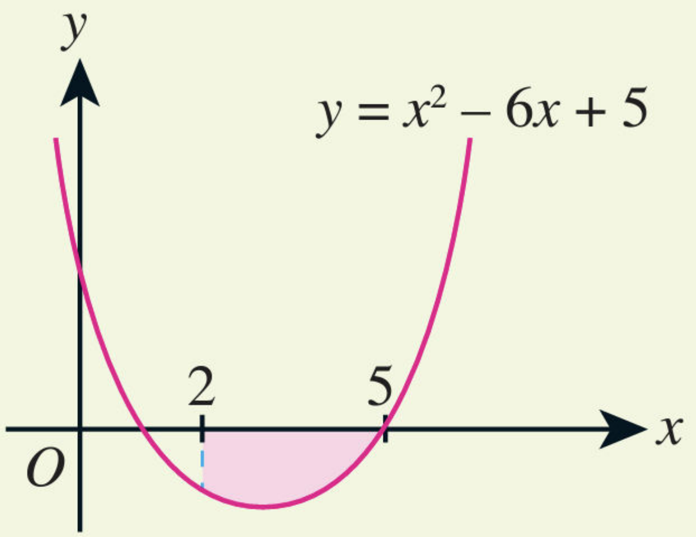
$$= \int_2^5 (x^2 - 6x + 5) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_2^5$$

$$= \left[\frac{5^3}{3} - \frac{6(5)^2}{2} + 5(5)\right] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{6(2)^2}{2} + 5(2)\right]$$

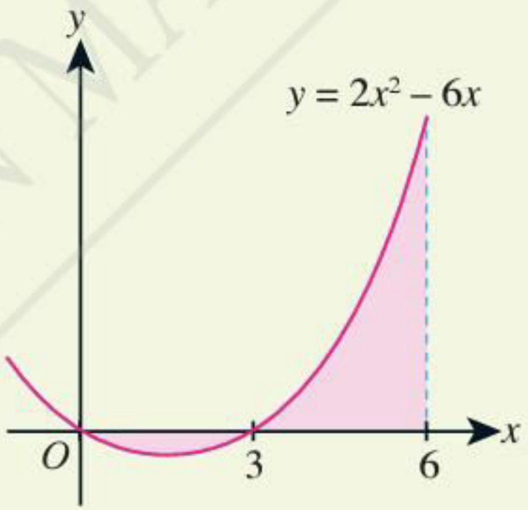
$$= -9$$

Maka, luas rantau berlorek ialah 9 unit^2.



Contoh 15

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 2x^2 - 6x$. Cari luas bagi rantau yang berlorek itu.



Penyelesaian

Katakan A mewakili rantau berlorek di bawah paksi-x dan B mewakili rantau berlorek di atas paksi-x.

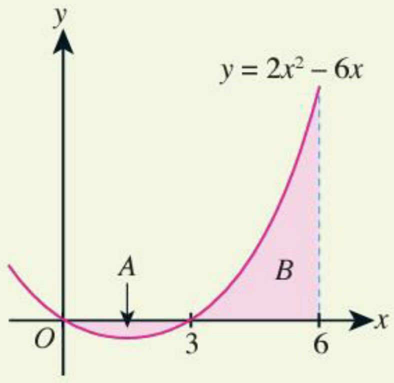
$$\begin{aligned}
\text{Luas rantau } A &= \int_0^3 y\,dx \\
&= \int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 \\
&= \left[\frac{2(3)^3}{3} - 3(3)^2\right] - \left[\frac{2(0)^3}{3} - 3(0)^2\right] \\
&= -9
\end{aligned}$$

Jadi, luas rantau A ialah 9 unit^2.

$$\begin{aligned}
\text{Luas rantau } B &= \int_3^6 y\,dx \\
&= \int_3^6 (2x^2 - 6x)\,dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_3^6 \\
&= \left[\frac{2(6)^3}{3} - 3(6)^2\right] - \left[\frac{2(3)^3}{3} - 3(3)^2\right] \\
&= 45
\end{aligned}$$

Jadi, luas rantau B ialah 45 unit^2.

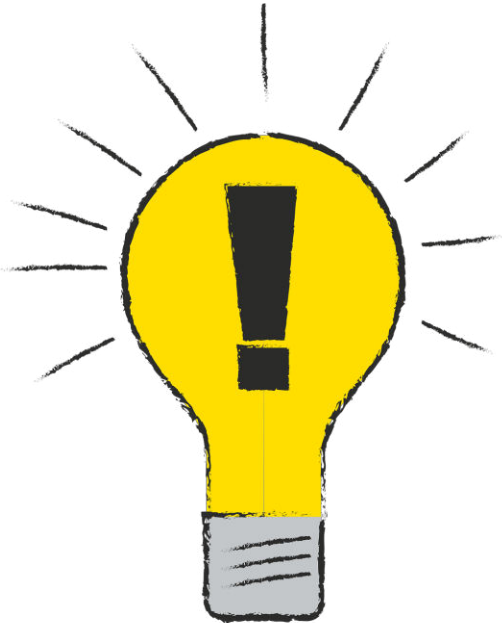
$$\begin{aligned}
\text{Maka, luas rantau berlorek} &= 9 + 45 \\
&= 54 \text{ unit}^2
\end{aligned}$$



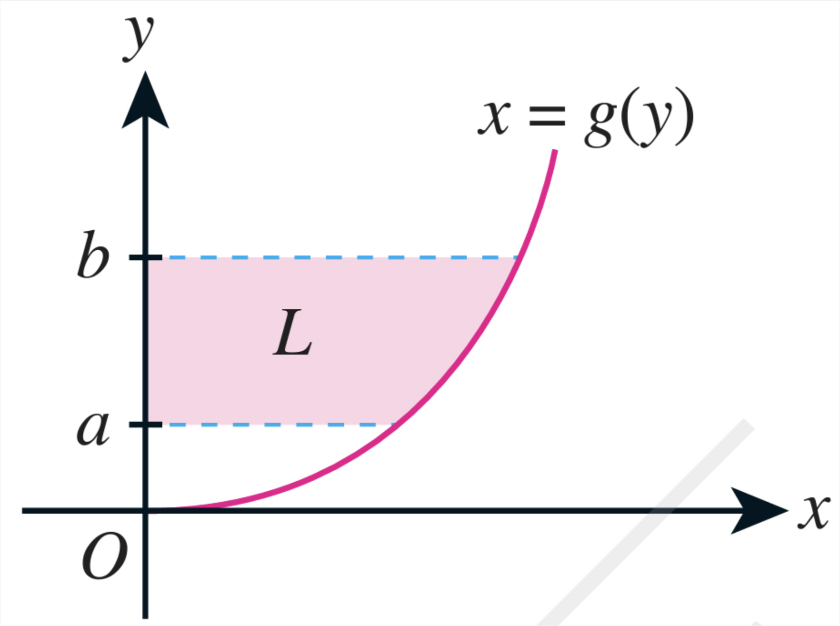
Kaedah Alternatif

Luas rantau berlorek

$$\begin{aligned}
&= \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx\right| + \int_3^6 (2x^2 - 6x)\,dx \\
&= |-9| + 45 \\
&= 9 + 45 \\
&= 54 \text{ unit}^2
\end{aligned}$$



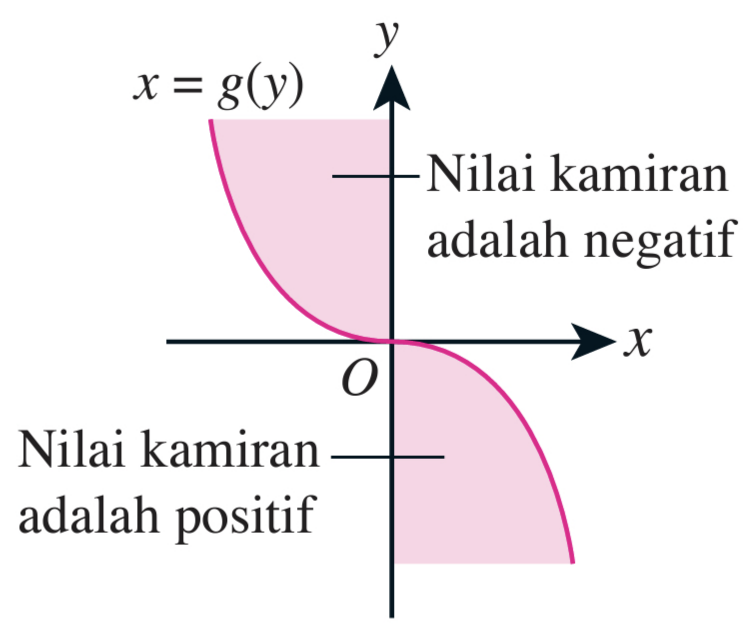
$$L = \int_a^b x \, dy$$



LUAS RANTAU ANTARA SUATU LENGKUNG DENGAN PAKSI-Y

Bagi suatu rantau yang dibatasi oleh suatu lengkung dan paksi-y,

- Jika rantau itu berada di sebelah kiri paksi-y, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **negatif**.
- Jika rantau itu berada di sebelah kanan paksi-y, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **positif**.
- Luas bagi kedua-dua rantau adalah positif.

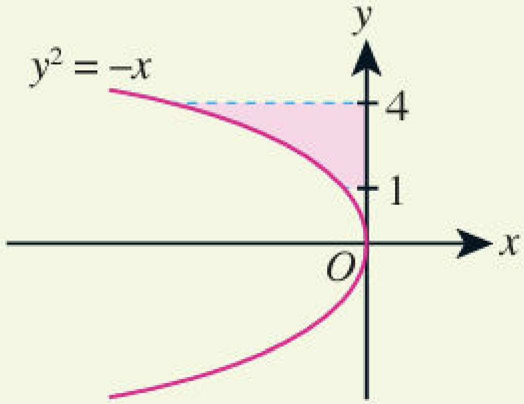


LUAS RANTAU ANTARA SUATU LENGKUNG DENGAN PAKSI-Y

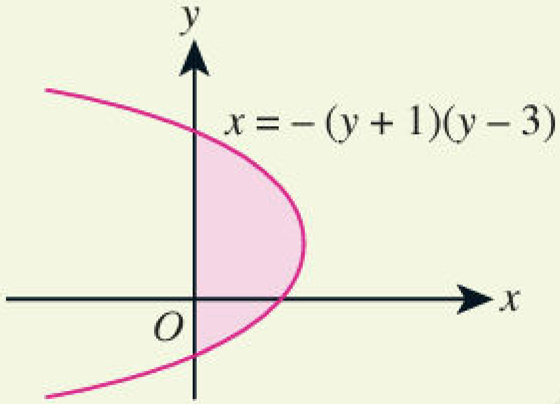
Contoh 16

Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

(a)



(b)



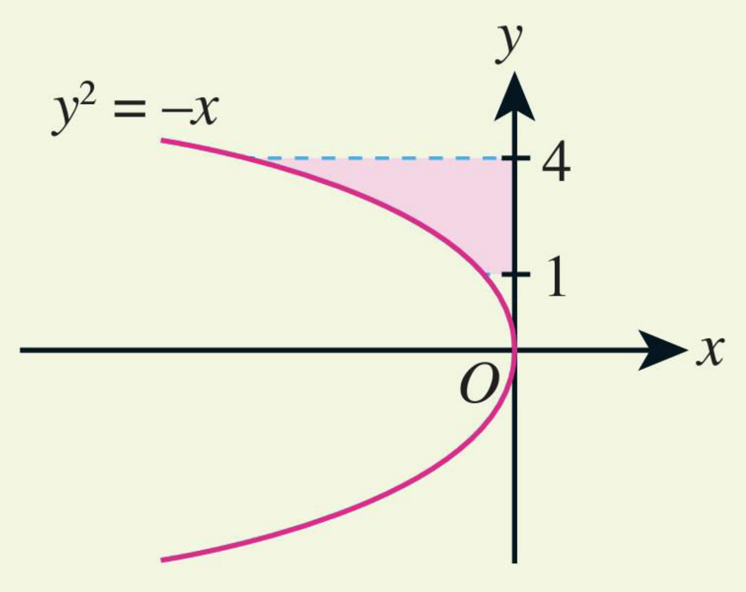
Penyelesaian

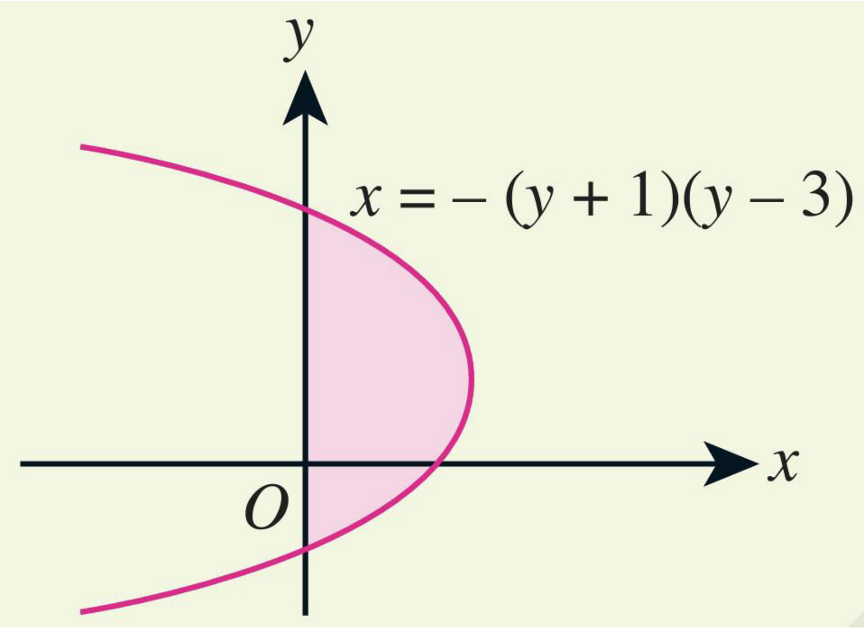
(a) Diberi $y^2 = -x$.

Jadi, $x = -y^2$.

$$\begin{aligned}\text{Luas rantau} &= \int_1^4 x\,dy \\ &= \int_1^4 -y^2\,dy \\ &= \left[-\frac{y^3}{3}\right]_1^4 \\ &= \left[-\frac{4^3}{3}\right] - \left[-\frac{1^3}{3}\right] \\ &= -21\end{aligned}$$

Maka, luas rantau berlorek ialah 21 unit^2.





(b) Diberi $x = -(y + 1)(y - 3)$.

Apabila $x = 0$,

$-(y + 1)(y - 3) = 0$

$y = -1 \quad \text{atau} \quad y = 3$

Jadi, batas bagi rantau berlorek itu ialah $y = -1$ dan $y = 3$.

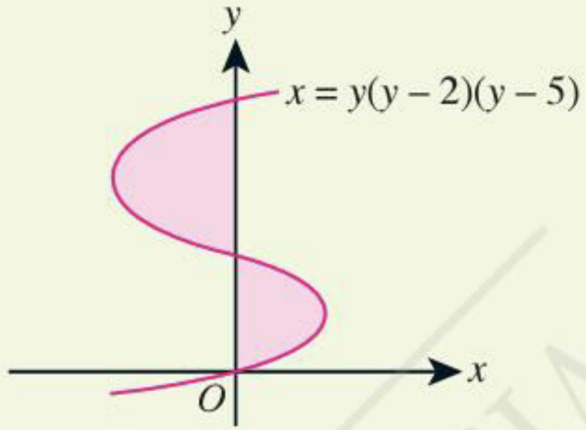
Oleh itu,

$$
\begin{aligned}
\text{Luas rantau} &= \int_{-1}^{3} x\, dy \\
&= \int_{-1}^{3} -(y + 1)(y - 3)\, dy \\
&= \int_{-1}^{3} (-y^2 + 2y + 3)\, dy \\
&= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2} + 3y\right]_{-1}^{3} \\
&= \left[-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3(3)\right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1)\right] \\
&= 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

Maka, luas rantau berlorek ialah $\frac{32}{3}$ unit².

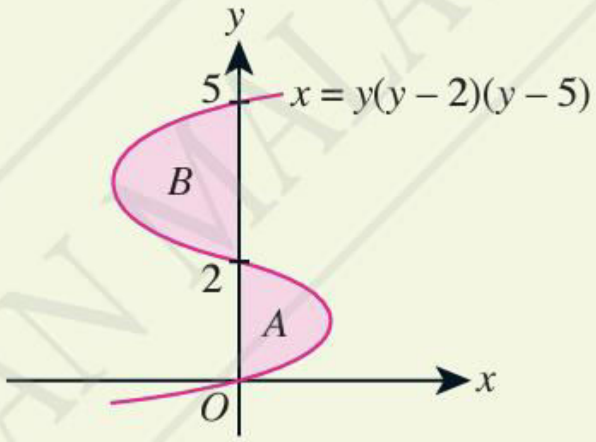
Contoh 17

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $x = y(y - 2)(y - 5)$. Cari luas bagi rantau yang berlorek itu.



Penyelesaian

Katakan A mewakili rantau berlorek di sebelah kanan paksi-y dan B mewakili rantau berlorek di sebelah kiri paksi-y.



Diberi $x = y(y - 2)(y - 5)$.
Apabila $x = 0$,
$y(y - 2)(y - 5) = 0$
$y = 0, \quad y = 2 \quad \text{atau} \quad y = 5$

Jadi, batas bagi rantau A ialah $y = 0$ dan $y = 2$ dan batas bagi rantau B ialah $y = 2$ dan $y = 5$.

Oleh itu,

Luas rantau A

$$= \int_0^2 y(y-2)(y-5)\, dy$$

$$= \int_0^2 (y^3 - 7y^2 + 10y)\, dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{4} - \frac{7y^3}{3} + \frac{10y^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{7(2)^3}{3} + 5(2)^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{7(0)^3}{3} + 5(0)^2\right]$$

$$= \frac{16}{3} - 0$$

$$= \frac{16}{3}$$

Jadi, luas rantau A ialah $\frac{16}{3}$ unit^2.

Luas rantau B

$$= \int_2^5 y(y-2)(y-5)\, dy$$

$$= \int_2^5 (y^3 - 7y^2 + 10y)\, dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{4} - \frac{7y^3}{3} + \frac{10y^2}{2}\right]_2^5$$

$$= \left[\frac{5^4}{4} - \frac{7(5)^3}{3} + 5(5)^2\right] - \left[\frac{2^4}{4} - \frac{7(2)^3}{3} + 5(2)^2\right]$$

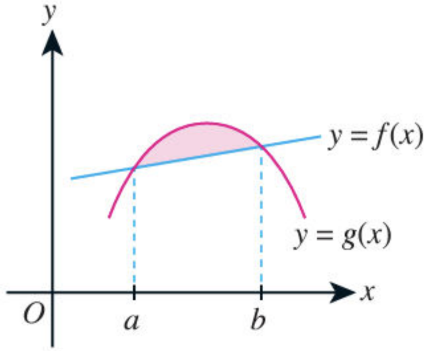
$$= -\frac{125}{12} - \frac{16}{3}$$

$$= -\frac{63}{4}$$

Jadi, luas rantau B ialah $\frac{63}{4}$ unit^2.

$$\text{Luas rantau berlorek} = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$$

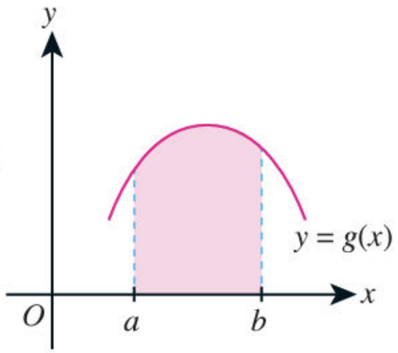
Maka, luas rantau berlorek ialah $\frac{253}{12}$ unit^2.



Luas rantau berlorek

Rajah 3.1(a)

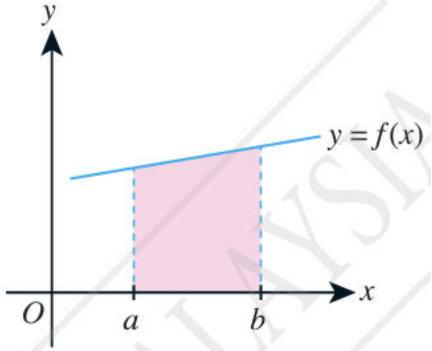
=



Luas di bawah lengkung $y = g(x)$

Rajah 3.1(b)

−



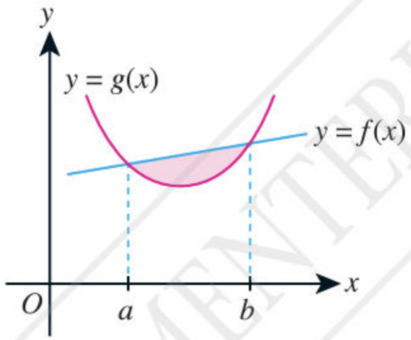
Luas di bawah garis $y = f(x)$

Rajah 3.1(c)

Maka,

$$\text{Luas rantau berlorek} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

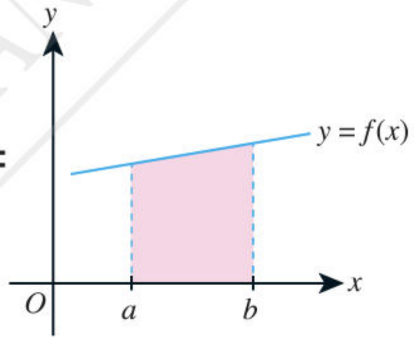
L U A S R A N T A U A N T A R A S U A T U L E N G K U N G D E N G A N G A R I S L U R U S



Luas rantau berlorek

Rajah 3.2(a)

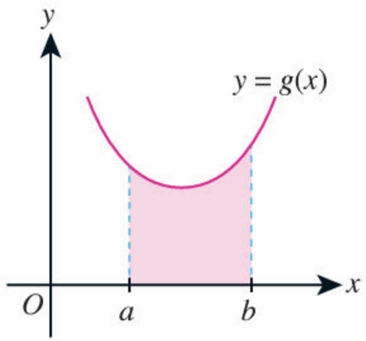
=



Luas di bawah garis $y = f(x)$

Rajah 3.2(b)

−



Luas di bawah lengkung $y = g(x)$

Rajah 3.2(c)

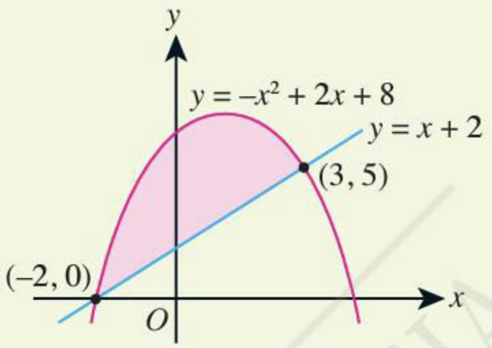
Maka,

$$\text{Luas rantau berlorek} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

LUAS RANTAU ANTARA SUATU LENGKUNG DENGAN GARIS LURUS

Contoh 18

Dalam rajah di sebelah, lengkung $y = -x^2 + 2x + 8$ bersilang dengan garis lurus $y = x + 2$ pada titik $(-2, 0)$ dan $(3, 5)$. Cari luas bagi rantau yang berlorek.



Penyelesaian

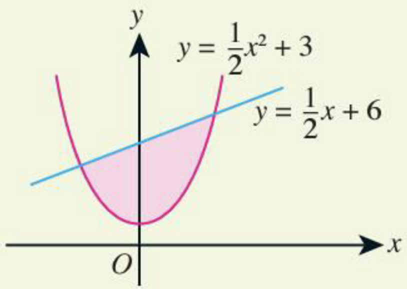
$$
\begin{aligned}
\text{Luas rantau} &= \int_{-2}^{3} (-x^2 + 2x + 8)\, dx - \int_{-2}^{3} (x + 2)\, dx \\
&= \int_{-2}^{3} (-x^2 + 2x + 8 - x - 2)\, dx \\
&= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} \\
&= \left[-\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2)\right] \\
&= \frac{125}{6} \text{ unit}^2
\end{aligned}
$$

PERBINCANGAN

Apakah kaedah lain yang boleh digunakan untuk menyelesaikan Contoh 18? Bincangkan.

Contoh 19

Rajah di sebelah menunjukkan garis lurus $y = \frac{1}{2}x + 6$ yang bersilang dengan lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$. Hitung luas rantau berlorek yang dibatasi oleh garis lurus dan lengkung itu.



Penyelesaian

$y = \frac{1}{2}x^2 + 3 \quad \ldots❶$

$y = \frac{1}{2}x + 6 \quad \ldots❷$

Gantikan ❶ ke dalam ❷,

$$\frac{1}{2}x^2 + 3 = \frac{1}{2}x + 6$$
$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x + 2)(x - 3) = 0$$
$$x = -2 \text{ atau } x = 3$$

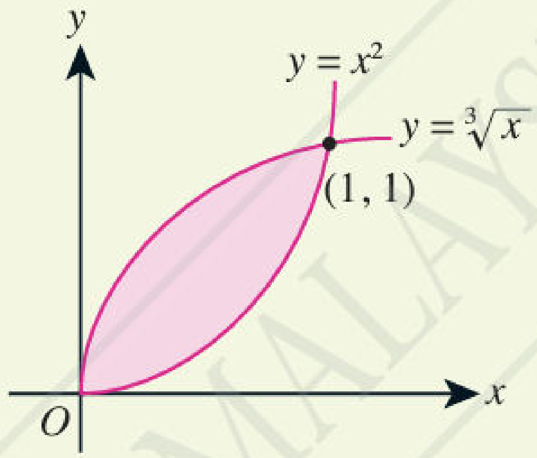
Luas rantau

$$= \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x + 6\right) dx - \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) dx$$
$$= \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x + 6\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) dx$$
$$= \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + 3\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + 3x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left[\frac{3^2}{4} - \frac{3^4}{6} + 3(3)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{4} - \frac{(-2)^3}{6} + 3(-2)\right]$$
$$= \frac{125}{12} \text{ unit}^2$$

Contoh 20

Lengkung $y = x^2$ dan $y = \sqrt[3]{x}$ bersilang pada titik (0, 0) dan (1, 1). Cari luas bagi rantau di antara dua lengkung itu.

Penyelesaian

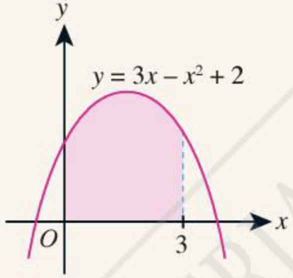


$$
\begin{aligned}
\text{Luas rantau} &= \int_0^1 \sqrt[3]{x}\ dx - \int_0^1 x^2\ dx \\
&= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{3(1)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{1^3}{3}\right] - \left[\frac{3(0)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{0^3}{3}\right] \\
&= \frac{5}{12}\ \text{unit}^2
\end{aligned}
$$

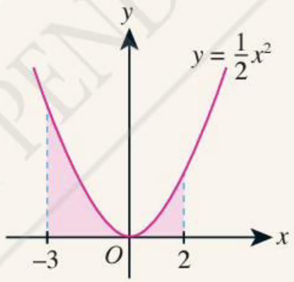
Latihan Kendiri 3.6

1. Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

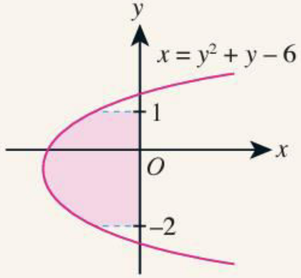
(a)



(b)

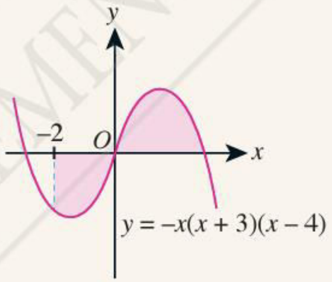


(c)

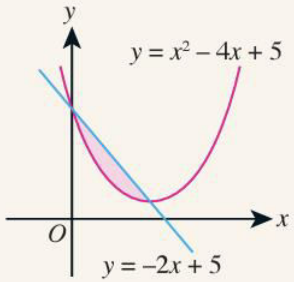


2. Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

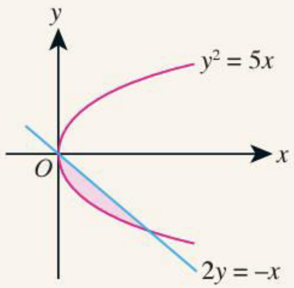
(a)



(b)

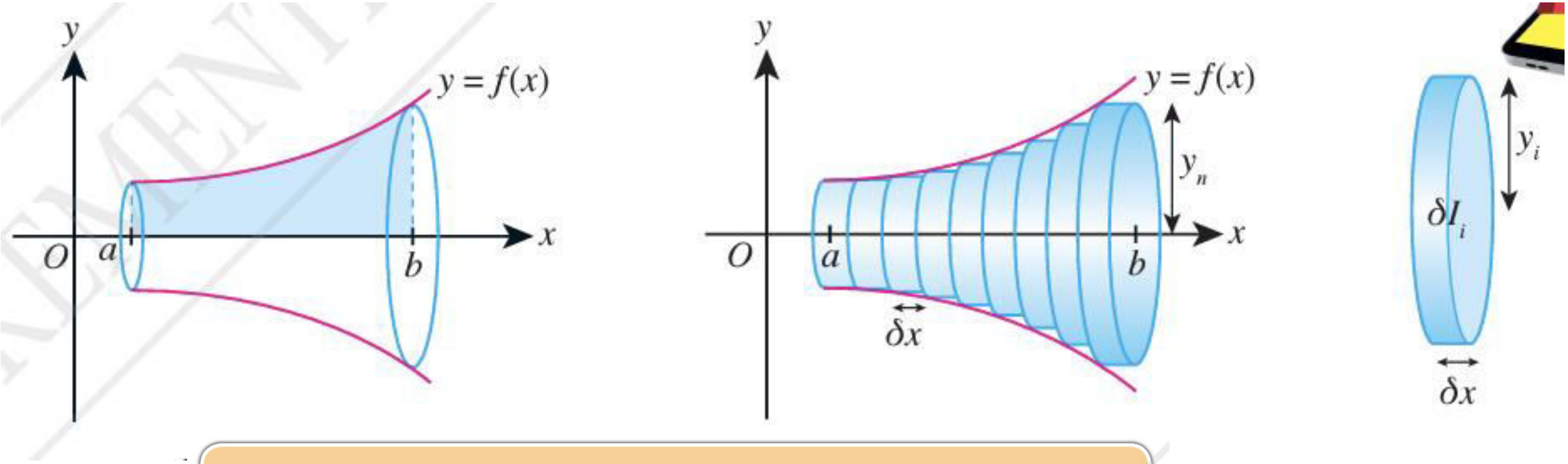


(c)



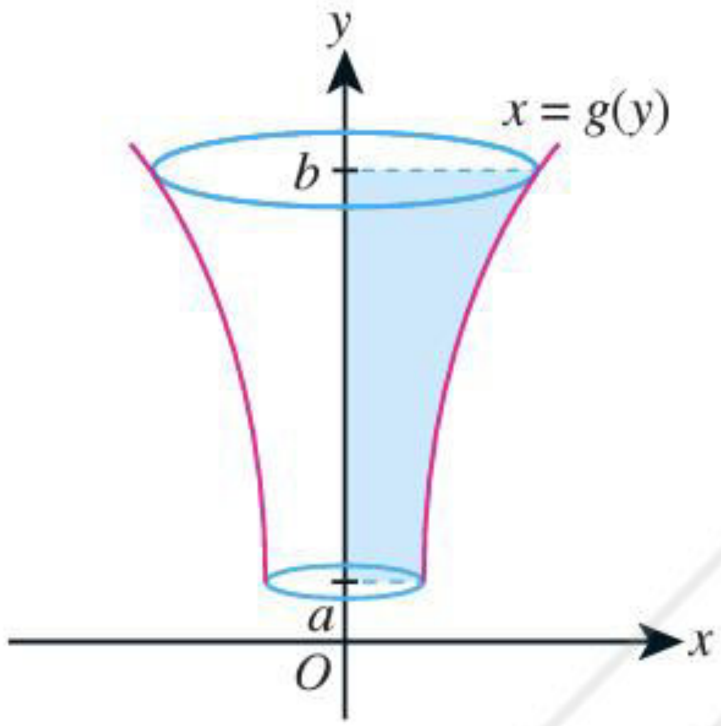
3. (a) Jika lengkung $y = -x^3 - x^2$ menyilang lengkung $y = -x - x^2$ pada titik $(-1, 0)$, $(0, 0)$ dan $(1, -2)$, cari luas rantau di antara dua lengkung itu.

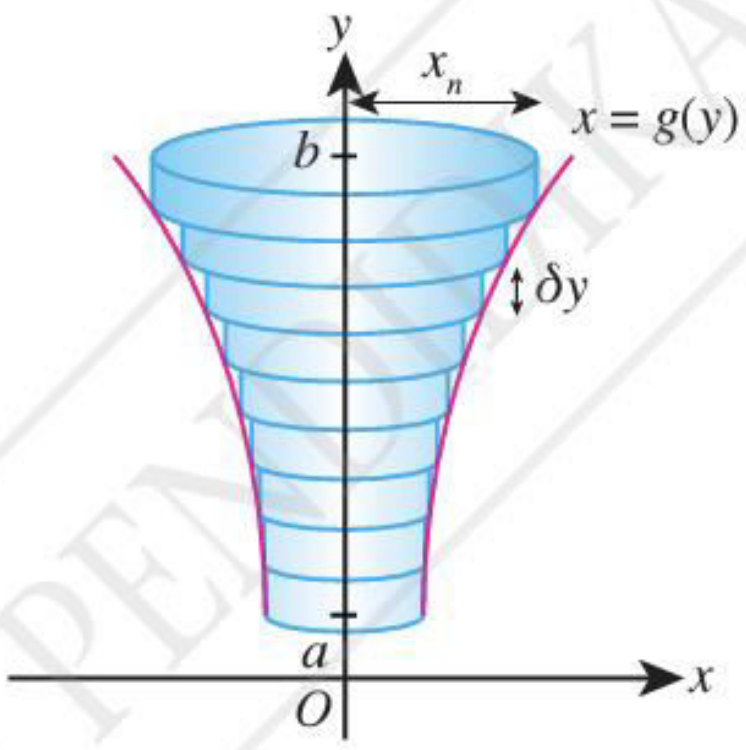
(b) Diberi bahawa lengkung $y = x^2 - 4x$ dan $y = 2x - x^2$ bersilang pada dua titik. Cari luas bagi rantau di antara dua lengkung itu.

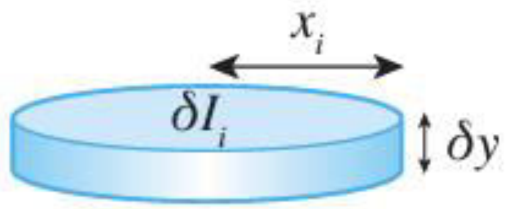


$$\text{Isi padu bongkah janaan} = \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \, \delta x = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

PERKAITAN ANTARA HAD BAGI HASIL TAMBAH ISI PADU SILINDER DENGAN ISI PADU JANAAN DARIPADA KISARAN SUATU RANTAU



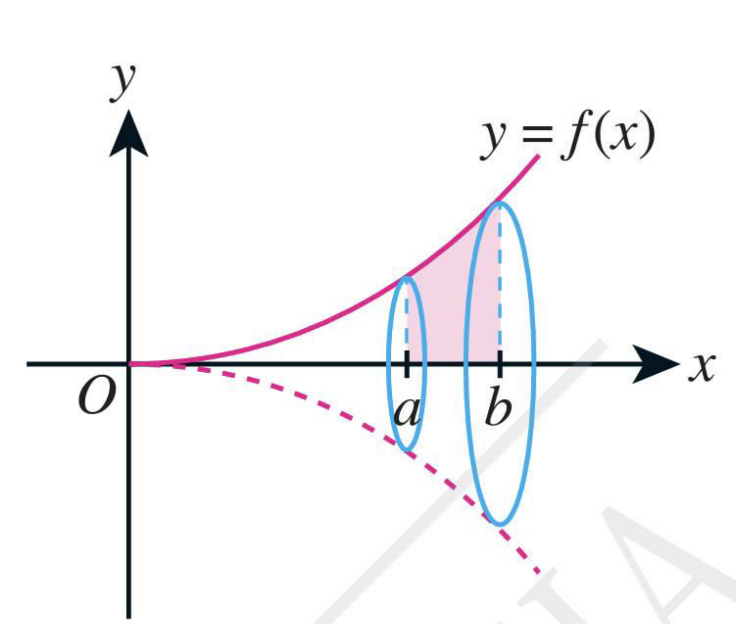




$$\text{Isi padu bongkah janaan} = \underset{\delta y \to 0}{\text{had}} \sum_{i=1}^{n} \pi x_i^2 \, \delta y = \int_a^b \pi x^2 \, dy$$

PERKAITAN ANTARA HAD BAGI HASIL TAMBAH ISI PADU SILINDER DENGAN ISI PADU JANAAN DARIPADA KISARAN SUATU RANTAU

$$I = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

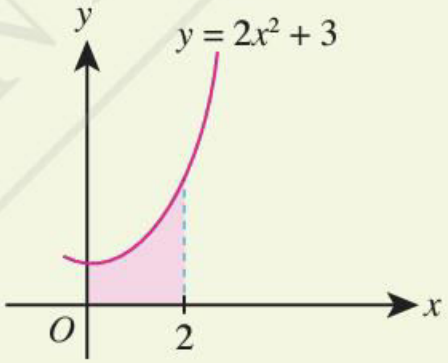


ISI PADU JANAAN BAGI SUATU RANTAU YANG DIKISARKAN PADA PAKSI-X ATAU PAKSI-Y

Contoh 21

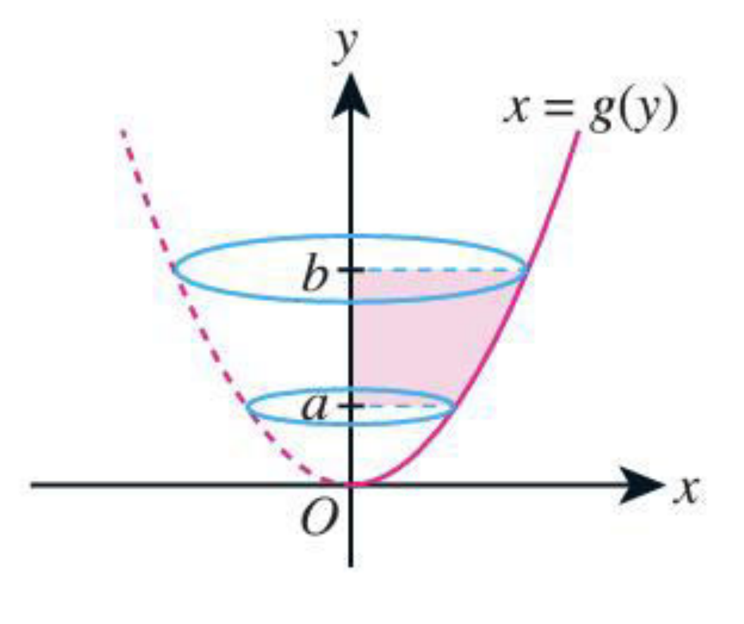
Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, bagi rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = 2x^2 + 3$, $x = 0$ dan $x = 2$ yang dikisarkan sepenuhnya pada paksi-x.

Penyelesaian



$$\begin{aligned}
\text{Isi padu janaan} &= \int_0^2 \pi y^2\, dx \\
&= \pi \int_0^2 (2x^2 + 3)^2\, dx \\
&= \pi \int_0^2 (4x^4 + 12x^2 + 9)\, dx \\
&= \pi \left[\frac{4x^5}{5} + \frac{12x^3}{3} + 9x\right]_0^2 \\
&= \pi \left[\left(\frac{4(2)^5}{5} + 4(2)^3 + 9(2)\right) - \left(\frac{4(0)^5}{5} + 4(0)^3 + 9(0)\right)\right] \\
&= 75\frac{3}{5}\pi \text{ unit}^3
\end{aligned}$$

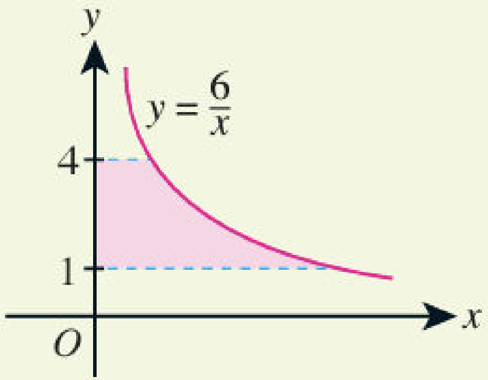
$$I = \int_a^b \pi x^2 \, dy$$



ISI PADU JANAAN BAGI SUATU RANTAU YANG DIKISARKAN PADA PAKSI-X ATAU PAKSI-Y

Contoh 22

Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek dalam rajah di sebelah diputarkan melalui 360° pada paksi-y.



Penyelesaian

Diberi $y = \dfrac{6}{x}$

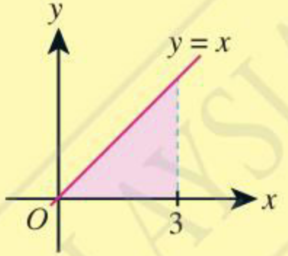
Jadi, $x = \dfrac{6}{y}$

$$\begin{aligned}
\text{Isi padu janaan} &= \int_1^4 \pi x^2 \, dy \\
&= \pi \int_1^4 \left(\frac{6}{y}\right)^2 dy \\
&= \pi \int_1^4 \left(\frac{36}{y^2}\right) dy \\
&= \pi \int_1^4 (36y^{-2}) \, dy \\
&= \pi \left[\frac{36y^{-1}}{-1}\right]_1^4 \\
&= \pi \left[-\frac{36}{y}\right]_1^4 \\
&= \pi \left[\left(-\frac{36}{4}\right) - \left(-\frac{36}{2}\right)\right] \\
&= 27\pi \text{ unit}^3
\end{aligned}$$

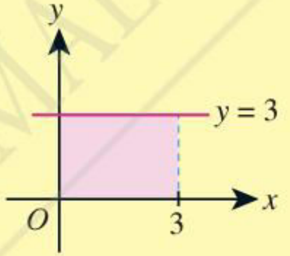
PERBINCANGAN

Apakah bentuk geometri yang akan terbentuk apabila rantau berlorek dalam setiap rajah di bawah dikisarkan sepenuhnya pada paksi-x?

(a)



(b)

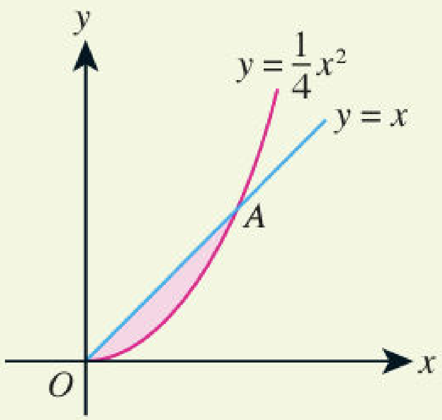


Contoh 23

Dalam rajah di sebelah, lengkung $y = \frac{1}{4}x^2$ bersilang dengan garis lurus $y = x$ pada titik O dan A. Cari

(a) koordinat bagi titik A,

(b) isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek itu dikisarkan sepenuhnya pada paksi-x.



Penyelesaian

(a) $y = \frac{1}{4}x^2 \quad \ldots$ 1

$y = x \quad \ldots$ 2

Gantikan 1 ke dalam 2,

$$\frac{1}{4}x^2 = x$$
$$x^2 = 4x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x - 4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = 4$$

Gantikan $x = 4$ ke dalam 2, kita peroleh $y = 4$.

Maka, koordinat bagi titik A ialah $(4, 4)$.

(b) Katakan I_1 ialah isi padu janaan bagi garis lurus $y = x$ dan I_2 ialah isi padu janaan bagi lengkung $y = \frac{1}{4}x^2$ daripada $x = 0$ hingga $x = 4$.

$$I_1 = \int_0^4 \pi(x)^2\, dx$$
$$I_1 = \pi \int_0^4 x^2\, dx$$
$$I_1 = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$
$$I_1 = \pi\left[\left(\frac{4^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)\right]$$
$$I_1 = \frac{64}{3}\pi \text{ unit}^3$$

$$I_2 = \int_0^4 \pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$
$$I_2 = \pi \int_0^4 \frac{1}{16}x^4\, dx$$
$$I_2 = \pi\left[\frac{x^5}{16(5)}\right]_0^4$$
$$I_2 = \pi\left[\left(\frac{4^5}{80}\right) - \left(\frac{0^5}{80}\right)\right]$$
$$I_2 = \frac{64}{5}\pi \text{ unit}^3$$

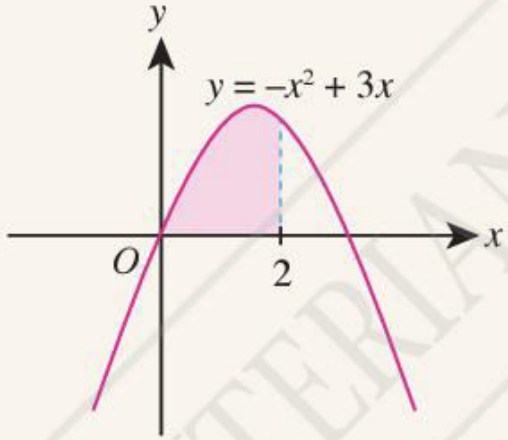
Maka, isi padu janaan $= I_1 - I_2$

$$= \frac{64}{3}\pi - \frac{64}{5}\pi$$
$$= 8\frac{8}{15}\pi \text{ unit}^3$$

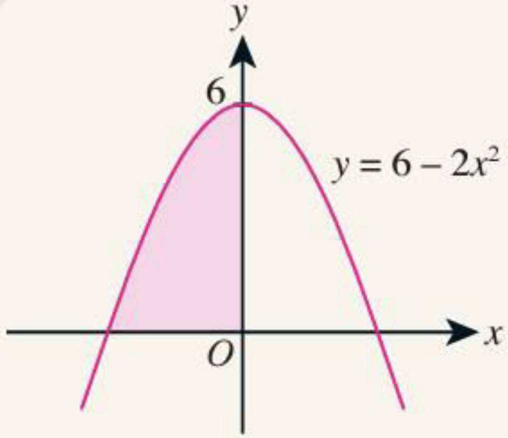
Latihan Kendiri 3.7

1. Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek dalam setiap rajah yang berikut dikisarkan melalui $360°$.

   (a) Pada paksi-x.

   (b) Pada paksi-y.

2. Hitung isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh lengkung $y^2 = -4x$, $y = 0$ dan $y = 2$ dikisarkan melalui $360°$ pada paksi-y.

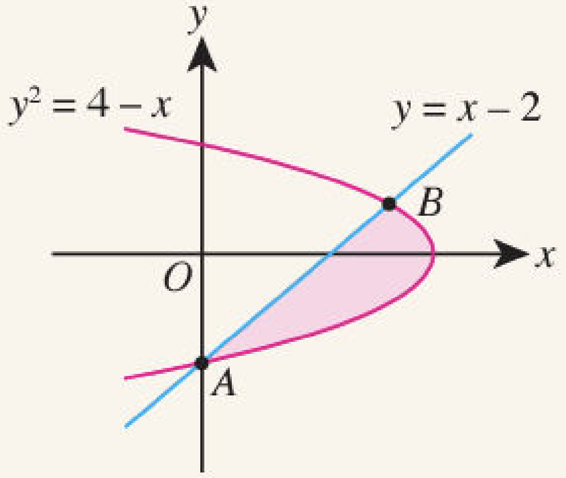
3. Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh garis lurus $y = 5 - x$, lengkung $y = -x^2 + 4$, paksi-x dan paksi-y dikisarkan sepenuhnya melalui paksi-x.

4. Dalam rajah di sebelah, lengkung $y^2 = 4 - x$ dan garis lurus $y = x - 2$ bersilang pada dua titik A dan B. Cari

(a) koordinat bagi titik A,

(b) koordinat bagi titik B,

(c) isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek yang dibatasi oleh lengkung $y^2 = 4 - x$ dan garis lurus $y = x - 2$ itu diputarkan melalui 360° pada paksi-y.



Latihan Formatif 3.3

Kuiz bit.ly/2Esl90x

1. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_{-1}^{3} (2 - x)^5 \, dx$ (b) $\int_{-3}^{2} \frac{8x - 6x^2 + 8}{2 - x} \, dx$ (c) $\int_{-2}^{3} 2x^2(x^2 - x)dx$

2. (a) Diberi $\int_{0}^{3} f(x) \, dx = 2$ dan $\int_{2}^{5} g(x) \, dx = 7$. Cari nilai bagi $\int_{3}^{0} \frac{1}{2} f(x) \, dx + \int_{2}^{5} 3g(x) \, dx$.

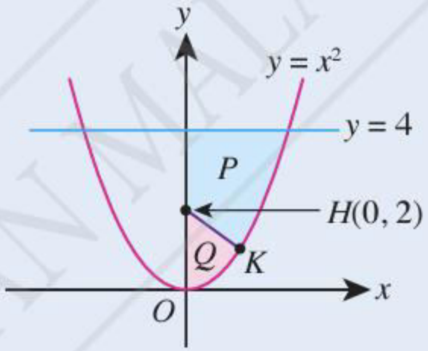
(b) Jika $\int_{1}^{7} k(x) \, dx = 10$, cari nilai bagi $\int_{1}^{3} [k(x) - 3] \, dx + \int_{3}^{7} k(x) \, dx$.

3. Diberi luas rantau di bawah lengkung $y = x^2 + hx - 5$ yang dibatasi oleh garis $x = 1$ dan $x = 4$ ialah $28\frac{1}{2}$ unit^2. Cari nilai bagi h.

4. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = x^2$ dan garis lurus $y = 4$. Suatu garis lurus dilukis melalui titik $H(0, 2)$ dengan kecerunan -1 dan bertemu dengan lengkung $y = x^2$ pada titik K. Cari

(a) koordinat titik K,

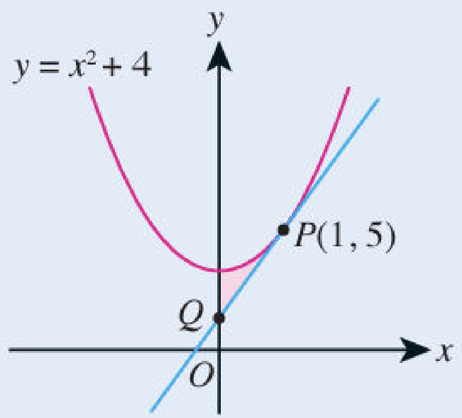
(b) nisbah luas rantau P kepada luas rantau Q.



5. (a) Lakarkan graf bagi lengkung $y = 6x + x^2$.
(b) Cari persamaan tangen kepada lengkung $y = 6x + x^2$ pada asalan dan pada titik dengan keadaan $x = 2$.
(c) Diberi bahawa kedua-dua tangen kepada lengkung itu bertemu pada titik A, cari koordinat titik A. Seterusnya, cari luas rantau yang dibatasi oleh garis-garis persamaan tangen dan lengkung tersebut.

6. Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, bagi rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = x^2 + 2$, garis lurus $x = 1$ dan $x = 2$ yang diputarkan melalui 360° pada paksi-y.

7. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = x^2 + 4$ dan tangen kepada lengkung itu pada titik $P(1, 5)$.
(a) Cari koordinat bagi titik Q.
(b) Hitung luas rantau berlorek.
(c) Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = x^2 + 4$, paksi-y dan garis lurus $y = 8$ dikisarkan sepenuhnya pada paksi-y.

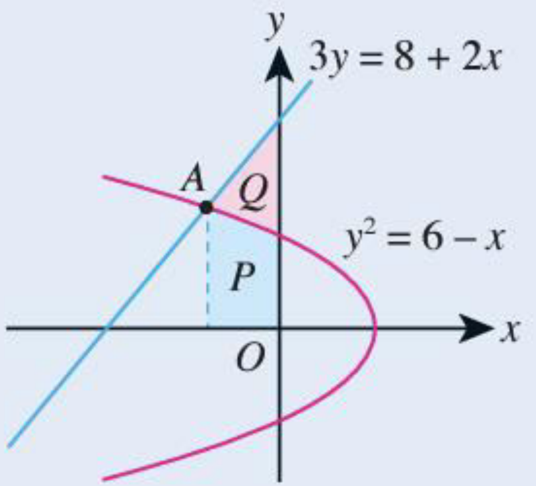


8. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y^2 = 6 - x$ dan garis lurus $3y = 8 + 2x$ yang bersilang pada titik A.

(a) Cari koordinat bagi titik A.

(b) Hitung luas rantau berlorek Q.

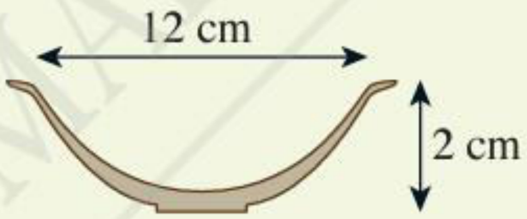
(c) Kira isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila luas rantau berlorek P diputarkan melalui 360° pada paksi-x.



APLIKASI PENGAMIRAN

Contoh 24 APLIKASI MATEMATIK

Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas bagi sebuah mangkuk berbentuk parabola yang fungsinya boleh diwakili oleh $y = ax^2$. Diameter dan kedalaman mangkuk itu masing-masing ialah 12 cm dan 2 cm. Tunjukkan bahawa $a = \frac{1}{18}$. Seterusnya, cari isi padu, dalam sebutan π, bahagian dalaman mangkuk tersebut.



APLIKASI PENGAMIRAN

Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Bentuk bahagian dalaman mangkuk itu diwakili oleh $y = ax^2$.
- Diameter mangkuk = 12 cm.
- Kedalaman mangkuk = 2 cm.
- Cari nilai a bagi persamaan $y = ax^2$.
- Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, bahagian dalaman mangkuk itu.

2 . Merancang strategi

- Gantikan koordinat (6, 2) ke dalam persamaan $y = ax^2$.
- Gunakan rumus $\int_0^2 \pi x^2 \, dy$.

3 . Melaksanakan strategi

Diberi $y = ax^2$.

Apabila $x = 6$ dan $y = 2$,

$$\begin{aligned} 2 &= a(6)^2 \\ 2 &= 36a \\ a &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Jadi, $y = \frac{1}{18}x^2$

$$x^2 = 18y$$

Isi padu dalaman mangkuk

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \pi(18y)\, dy \\ &= \pi\left[\frac{18y^2}{2}\right]_0^2 \\ &= \pi[9(2)^2 - 9(0)^2] \\ &= 36\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

4 . Membuat refleksi

$$\begin{aligned} \int_0^2 \pi\left(\frac{y}{a}\right) dy &= 36\pi \\ \pi\left[\frac{y^2}{2a}\right]_0^2 &= 36\pi \\ \left[\frac{2^2}{2a} - \frac{0^2}{2a}\right] &= \frac{36\pi}{\pi} \\ \frac{2}{a} &= 36 \\ a &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Contoh 25 APLIKASI MATEMATIK

Dalam satu kajian, didapati bahawa kadar pertambahan luas bagi koloni bakteria pada agar-agar makmal boleh diwakili oleh $\frac{dA}{dt} = 2t + 5$, dengan keadaan A ialah luas koloni bakteria, dalam cm^2, dan t ialah masa, dalam saat, apabila bakteria dikulturkan pada agar-agar.

Diberi bahawa bilangan bakteria bagi setiap keluasan 1 cm^2 ialah 1 000 000 sel dan koloni bakteria mempunyai ketebalan satu sel sahaja. Cari bilangan bakteria selepas 5 saat.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Kadar pertambahan luas bagi koloni bakteria pada agar-agar makmal, $\frac{dA}{dt} = 2t + 5$.
- Bilangan bakteria bagi keluasan $1 \text{ cm}^2 = 1\ 000\ 000$ sel.
- Cari luas bagi koloni bakteria.
- Cari bilangan bakteria selepas 5 saat.

2. Merancang strategi

- Gunakan rumus $\int_0^5 (2t + 5)\, dt$.
- Cari bilangan bakteria dengan mendarabkan luas koloni bakteria dengan bilangan sel per cm^2.

3. Melaksanakan strategi

Luas koloni bakteria selepas 5 saat

$$= \int_0^5 (2t + 5)\, dt$$
$$= \left[\frac{2t^2}{2} + 5t\right]_0^5$$
$$= \left[t^2 + 5t\right]_0^5$$
$$= [(5^2 + 5(5)) - (0^2 + 5(0))]$$
$$= 50 \text{ cm}^2$$

$$\text{Bilangan bakteria} = 50 \times 1\ 000\ 000 = 50\ 000\ 000 = 5 \times 10^7$$

Maka, bilangan bakteria selepas 5 saat ialah 5×10^7 sel.

4. Membuat refleksi

Katakan u ialah masa yang diperlukan untuk menghasilkan 5×10^7 sel bakteria.

$$\left[\int_0^u (2t + 5)\, dt\right] \times 1\ 000\ 000 = 5 \times 10^7$$
$$\left[\frac{2t^2}{2} + 5t\right]_0^u = \frac{5 \times 10^7}{1\ 000\ 000}$$
$$\left[t^2 + 5t\right]_0^u = \frac{5 \times 10^7}{1\ 000\ 000}$$
$$[(u^2 + 5u) - 0] = 50$$
$$u^2 + 5u = 50$$
$$u^2 + 5u - 50 = 0$$

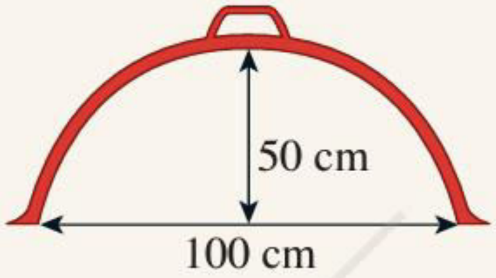
Dengan menggunakan kaedah pemfaktoran, kita peroleh

$$(u + 10)(u - 5) = 0$$
$$u = -10 \text{ atau } u = 5$$

Oleh sebab nilai u mestilah positif, maka $u = 5$ saat.

Latihan Kendiri 3.8

1. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas bagi sebuah tudung saji rotan berbentuk parabola yang boleh diwakili oleh persamaan $y = -kx^2$, dengan keadaan y adalah tinggi, dalam m, dan x ialah jejari, dalam m, tudung saji itu.



   (a) Tunjukkan bahawa $k = \frac{1}{50}$.

   (b) Cari isi padu, dalam sebutan π, bahagian dalaman tudung saji itu.

2. Kadar penyusutan nilai harga bagi sebuah kereta dalam masa setahun diberi oleh $S'(t) = \frac{A}{1\ 000}(20 - t)$, dengan keadaan A ialah nilai harga asal, dalam RM, kereta tersebut dan t ialah bilangan tahun kereta itu dibeli.

   (a) Diberi harga asal bagi sebuah kereta ialah RM48 000. Cari nilai harga kereta itu selepas 7 tahun.

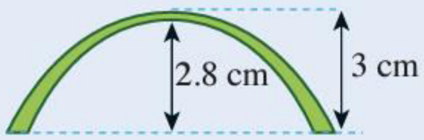
   (b) Jika harga asal sebuah kereta ialah RM88 500, cari peratus susutan nilai harga kereta tersebut selepas 5 tahun.

Latihan Formatif 3.4

Kuiz bit.ly/38MgTXK

1. Sebuah kilang menghasilkan minyak masak sawit. Didapati bahawa sebuah tangki minyak yang berbentuk silinder di kilang tersebut mengalami kebocoran. Tinggi minyak dalam tangki itu berkurang dengan kadar 5 cmmin^{-1} dan kadar perubahan isi padu minyak dalam tangki terhadap tinggi minyak diberi oleh $\frac{dV}{dh} = \frac{3}{5}t - 6$, dengan keadaan t ialah masa, dalam minit. Cari isi padu, dalam cm^3, minyak yang mengalir keluar daripada tangki itu selepas 0.5 jam.

2. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas sebuah penutup mesin yang dihasilkan oleh mesin pencetak 3D. Penutup itu diperbuat daripada sejenis bahan pencetak, iaitu filamen plastik. Bahagian dalam dan bahagian luar penutup itu masing-masing boleh diwakili oleh $y = -\frac{1}{16}x^2 + 2.8$ dan $y = -\frac{1}{20}x^2 + 3$. Anggarkan kos, dalam RM, filamen plastik yang digunakan untuk menghasilkan 20 penutup yang sama jika harga 1 cm^3 filamen plastik ialah 7 sen.



3. Kadar penghasilan suatu mesin di sebuah kilang diberi oleh $\frac{dK}{dt} = 50\left[1 + \frac{300}{(t + 25)^2}\right]$, dengan keadaan K ialah bilangan mesin yang dihasilkan dan t ialah bilangan minggu mesin tersebut dalam tempoh pengeluaran. Cari
   (a) bilangan mesin yang dihasilkan selepas 5 tahun,
   (b) bilangan mesin yang dihasilkan pada tahun ke-6.

TAMAT